

6. Lego® und anderes Rechenmaterial

Leider sind viele Anschauungshilfen für den Mathematikunterricht so konzipiert, dass sie das zählende Rechnen verstärken, anstatt es überwinden zu helfen. Rechenperlen, Muggelsteine, Legeplättchen, Steckwürfel: Sie alle haben die problematische Eigenschaft, auf der Menge 1 (ein Stein, ein Würfel ...) zu basieren. Selbst wenn ein Kind also damit üben will, Mengen als Gesamtheit zu erkennen, muss es sie zunächst zählend auf den Tisch legen. Zwar weichen Kinder bei Schwierigkeiten mit jedem Material auf das Zählen aus. Aber es ist ungut, das Abzählen unumgänglich zu machen, so dass auch Kinder, die in der Mengenerfassung sicher sind, es unnötig einschleifen, während die schwachen weiterhin keine Möglichkeit erhalten, es zu überwinden. Außerdem behalten Legosteine auch beim Zählen noch ihre Form und damit ihre Einheit als Menge. Es ist hingegen schwierig, in abgezählten Perlen oder Muggelsteinen Mengen statt einzelner Dinge zu sehen. Die Rechenstäbchen (nach ihrem Erfinder auch „Cuisenaire-Stäbchen“ genannt) basieren als einzige Alternative nicht auf der 1, sondern hier stehen 10 verschiedene Größen für die Mengen von 1-10 zur Verfügung. Aber auch sie haben ihre Tücken.

Vergleichen Sie, wie folgende Aufgabe mit den verschiedenen Medien gelöst werden kann (Eilige finden eine zusammenfassende Übersicht am Ende dieses Kapitels.):

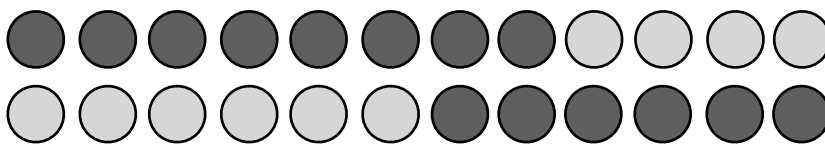
$$8 + 4 =$$

$$6 + 6 =$$

$$12$$

6.1 Lösung mit einerbasiertem Material

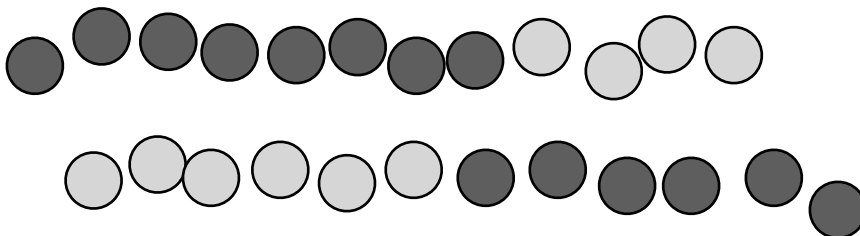
Diese Lösung steht beispielhaft für alle losen einerbasierten Materialien, also Steckwürfel, Legeplättchen, Muggelsteine, Gummibärchen ...



Lösungsweg:

Hier ist eine recht geschickte Lösung dargestellt, weil die unterschiedlichen Farben immerhin die Orientierung erleichtern. Es ist aber nicht gesagt, dass ein Kind von sich aus die Legeplättchen so strukturiert. Ein Kind, das die Farben von sich aus mengenbezogen einsetzt, würde schon an die Mengen denken und nicht nur an die einzelnen Steine. Es sind die schwachen Rechner bzw. die, die zum ersten Mal rechnen, die Material brauchen. Besonders, wenn sie immer wieder vom Mengenbegriff den Schritt zurück zum zählenden Rechnen tun. Das Material darf das nicht auch noch leicht machen, sondern es sollte durch seine Form und Gestaltung das Kind zum Denken in Mengen anhalten.

Bei einem motorisch ungeschickteren Kind (oder nach einem Schubs des Banknachbarn) sähe die Lösung eher so aus:



Das Ergebnis (12) kann nur zählend ermittelt werden, denn das Kind kann als Kontrolle nicht einfach seine Rechnung neben eine vorgefertigte 12er-Menge legen. Es müsste zum Vergleich eine Reihe von 12 Steinen abzählen und hinlegen – da kann es genauso gut einfach die Reihe aus $8 + 4$ abzählen, beides ist gleich (un-)sicher. Außerdem können die Steine leicht verrutschen, sodass man jeden Überblick verliert und umso mehr auf das Nachzählen angewiesen ist.

Bewertung des Materials

Lose einerbasierte Materialien sind keine geeignete Hilfe für Anfänger und schwache Rechner. Und guten Rechnern bietet das Material keine zusätzlichen Anregungen, außerdem kostet es zu viel Zeit. Daher sind diese Materialien „wenig empfehlenswert“ (Lorenz 2003, 94).

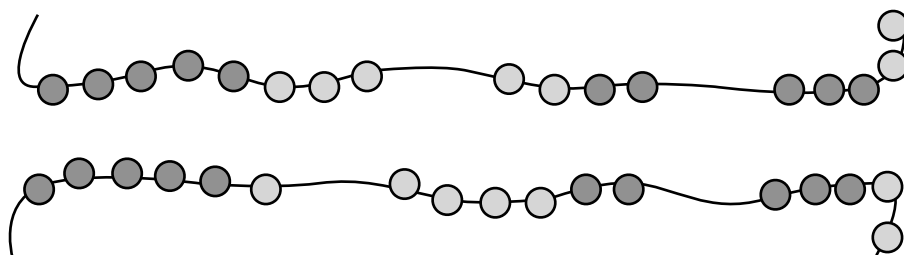
6.2 Lösung mit der strukturierten Rechenkette

Bei einer Rechenkette sind immer 10 oder 20 Perlen in Fünfergruppen aufgereiht. Dabei haben je fünf Perlen die gleiche Farbe. Bei Rechnungen, deren Ergebnis kleiner als 10 oder 20 ist, muss das Kind allerdings die übrigen Perlen ignorieren. Aber immerhin ist eine Struktur vorgegeben und Einzelteile können nicht verloren gehen. Andererseits sind fünf Perlen gar nicht so einfach simultan zu erfassen, eher in der Zerlegung $2 + 3$ – wenn man sie denn macht. Man kann die Farbe nicht an die verwendeten Teilmengen anpassen, nur bei der Zerlegung $5 + 5$ haben beide Teilmengen je eine Farbe. Davon abgesehen lassen sich die verschiedenen Zerlegungen der Zahl 10 gut darstellen, denn das Kind merkt: Ich kann rechts eine Perle mehr und links eine Perle weniger verwenden, ohne dass sich die Gesamtzahl der aufgefädelten Perlen ändert.

Lösungsweg

Die Lösung ist nicht sehr übersichtlich, weil die zahlreichen Elemente in einer einzigen Reihe angeordnet sind. Auch die übrigen Perlen können verwirren, sie müssen zur Seite geschoben und aktiv ignoriert oder einbezogen werden (z.B. mit der Folge-rechnung $12 + x = 20$). Es erfordert etwas Selbstüberwindung vom Schüler, die farbliche Zusammensetzung der Summanden zu nutzen und bei der Selbstkontrolle in Mengen zu denken (8 aus 5 dunklen und 3 hellen Perlen; 4 aus 2 hellen und 2 dunklen Perlen), anstatt die Perlen einfach abzuzählen. Der Vergleich mit der zweiten Rechnung ist nicht ganz einfach: Es ist schwer zu sehen, dass die beiden Reihen von 12 Perlen tatsächlich gleich lang sind – der Abstand ist zu unregelmäßig und die Perlen verrutschen leicht. Um das Ergebnis zu kontrollieren, liegt es wieder recht nahe, auf das Zählen auszuweichen, anstatt die Farbco-dierung zu benutzen. Wer konsequent mit diesem Material in Mengen denken möchte, muss zur Selbstkontrolle eigentlich Folgendes rechnen: $(5 + 3) + (2 + 2) = (5 + 1) + (4 + 2) = 12$.

Wer dabei den Überblick behält, dürfte über die Stufe hinaus sein, auf der er das Material wirklich benötigt.



Bewertung des Materials

Störend an den Perlenschnüren ist, dass immer 5 Perlen die gleiche Farbe haben, sodass nicht ein Summand eine Farbe erhält, sondern jeder Summand aus gemischten Farben besteht. Für ei-

nige Aufgaben ist das zwar praktisch, weil die 5er- bzw. 10er-Grenzen durch die Farben festgelegt sind. So können die Schüler mit einem anderen Blickwinkel immer erst „bis zum Zehner“ rechnen. Will man nicht vergleichen, sondern nur das Ergebnis „12“ ausrechnen, können die Kinder die Rechnungen wie folgt zerlegen:

$$8 + 4 = 12, \text{ gerechnet } 8 + 2 = 10, + 2 = 12$$

$$6 + 6 = 12, \text{ gerechnet } 6 + 4 = 10, + 2 = 12$$

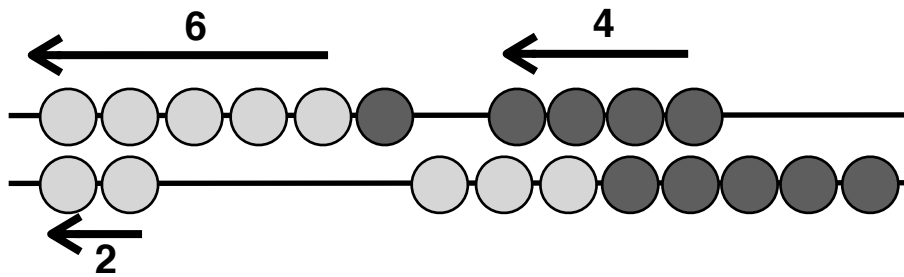
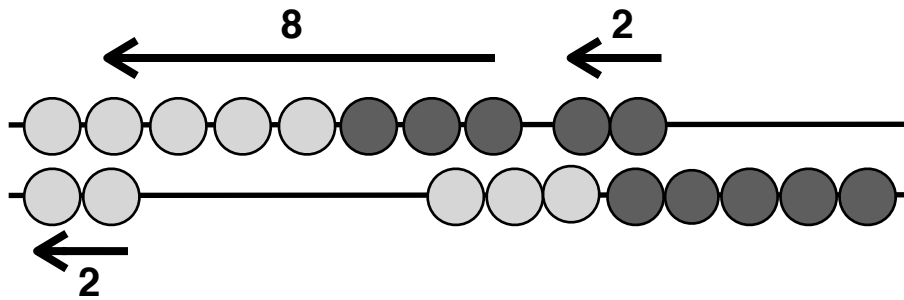
Weil die Farbgebung nicht verändert werden kann, ist das Material nicht so vielseitig einsetzbar, wie man es sich wünschen würde. Die möglichen Lösungswege sind aber durch die Gliederung für Kinder sehr aufschlussreich.

Während beim losen einerbasierten Material das zählende Rechnen notwendig ist, ist es bei der Rechenkette nur möglich. Sie verführt also nicht so stark zum Zählen wie anderes Material. Dennoch handelt es sich auch hier eben um ein einerbasiertes Material, bei dem schwache Kinder leicht auf das Zählen ausweichen können.

Ein weiterer Nachteil ist die Handhabung: Das Kind hat meist nur eine Hand frei, weil es mit der anderen die Schnur bzw. die anderen Perlen halten muss.

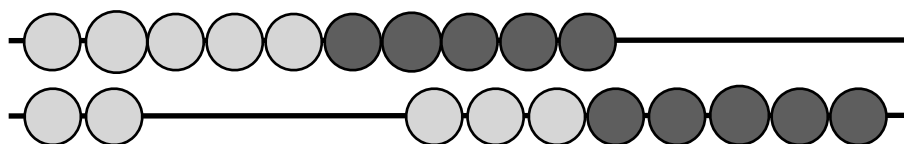
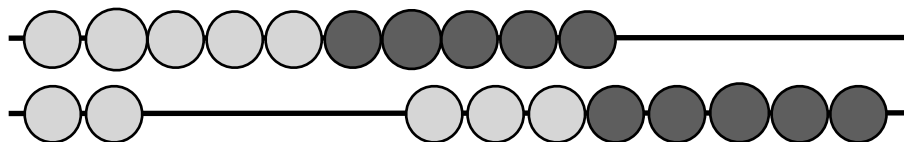
6.3 Lösung mit dem Rechenrahmen / Abakus

Der Rechenrahmen ähnelt der Rechenkette, aber die Perlen sind stabil befestigt und die Kinder haben die Hände frei. In jeder Reihe sind 10 Perlen angebracht, 5 in der einen und 5 in der anderen Farbe. Außerdem besitzt der große Rechenrahmen (bis 100) zehn Zeilen, sodass die Schüler verschiedene Zusammensetzungen durch unterschiedliche Anordnungen der Steine darstellen können (Felder bilden statt Reihen, s. Abb. auf S. 118).

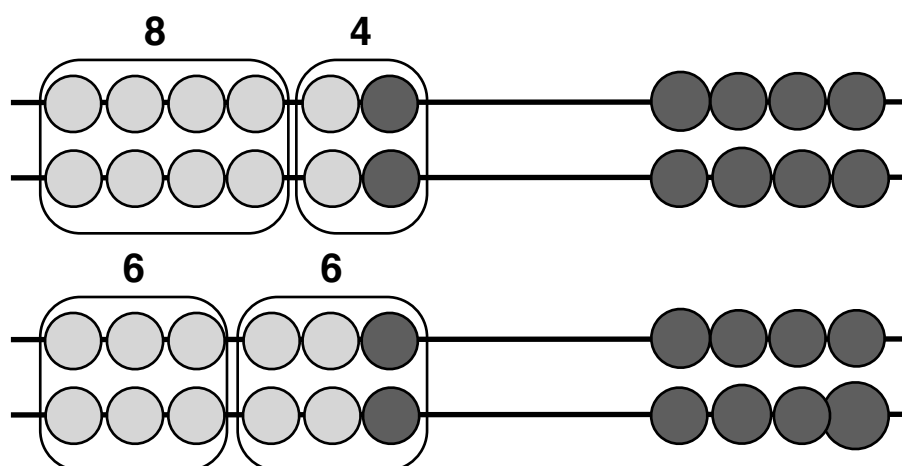


Lösungsweg

Beim hier dargestellten Lösungsweg werden die Perlen so eingesetzt, wie es dem Prinzip der Rechenkettens bzw. des Rechenrahmens entspricht: Man nutzt die farbige 5er-Einteilung so gut wie möglich und füllt immer erst bis zum Zehner auf.



Die beiden Ergebnisse sehen hinterher gleich aus, das bestätigt die Richtigkeit der Rechnung. *Leider bleiben die Unterschiede zwischen beiden Rechnungen so nicht erkennbar.* Sie waren nur in der Reihenfolge und Aufteilung des Schiebens repräsentiert. Man kann sie nach dem Schieben nur noch „sehen“, wenn man sie erneut denkt bzw. sich richtig an sie erinnert. Das hat seine Vorteile, weil es den Schüler fordert. Diese geistige Wiederholung empfinden rechenschwache Schüler jedoch als anstrengend und lassen sie daher vielleicht aus. Die Perlen halten den Schüler nicht dazu an, sich beim Vergleich die unterschiedlichen Zusammensetzungen der Zahl 12 erneut zu vergegenwärtigen. Es ist zwar denkbar, die Perlen genau entsprechend der Rechnung und immer zweizeilig zu verschieben, also einen anderen Verlauf zu benutzen:



Aber auch hier würde der Rechenweg nur durch das vergängliche Schieben dargestellt, im Endergebnis wäre er nicht mehr sichtbar. *Die hier eingezeichneten Umrandungen müssen sich die Schüler denken. Die Zerlegung muss gesehen werden. Man kann sie mit dem Material nicht darstellen.*

Bewertung des Materials

Es ist vorteilhaft, dass die Zahlzerlegungen im Hinblick auf die Zehn leicht durchgeführt werden können und leicht zu erkennen sind. Beim Anordnen der Perlen ist allerdings das Abzählen naheliegender als beim Rechnen mit Legosteinen. Denn trotz der Stabilität ist das Material immer noch einerbasiert. Mengen können, müssen aber nicht als Ganzes verschoben werden. Immerhin sind die Ergebnisse leichter ablesbar als bei den bisher genannten Materialien. Ein großer Nachteil ist die beschriebene Vergänglichkeit unterschiedlicher Rechenwege. Sie sind nicht mehr sichtbar, wenn die Perlen endgültig verschoben sind; und wenn man die Perlen mit Abstand stehen lässt, ist ein Vergleich zwischen mehreren Zeilen nur noch zählend möglich. Mit dem kleinen Rechenrahmen sind visuelle Vergleiche zwischen Summen >10 gar nicht möglich, da er nur über zwei Zeilen verfügt und die vorhergehende Rechnung beim Vergleich immer zerstört wird. Innerhalb seines Nutzungsbereiches ist der Rechenrahmen aber ein recht elegantes Medium.

6.4 Lösung mit Rechenstäbchen

Rechenstäbchen sind kleine Vierkanthölzer, deren Länge in cm ihrem Wert entspricht. Sie haben keine Unterteilung in 1er-Schritte. Jede Sorte von 1-10 ist in einer bestimmten Farbe lackiert. So ist die die 3 hellgrün, die 6 dunkelgrün. Die 8 ist braun, die 4 ist pink.



Lösungsweg

Mit den Rechenstäbchen gelingt die bei weitem schnellste Lösung – vorausgesetzt, der Schüler weiß auswendig, welches Stäbchen für die 8, 4 und 6 steht. Wenn das nicht der Fall ist, hätte er Probleme, z.B. wenn er versehentlich ein 7er-, ein 4er- und zwei 6er-Stäbchen erwischt und sich wundert, dass 8 und 4 doch nicht 12 ergeben. Das wäre bei einem rechenschwachen Schüler durchaus möglich, denn er muss nicht notwendigerweise darauf schließen, dass er das falsche Stäbchen verwendet hat.

Vorausgesetzt also, dass die Stäbchen auswendig erkannt werden, gibt diese Lösung sehr schön die Gleichheit der beiden Mengen wieder – und die unterschiedliche Zusammensetzung der beiden Summen bleibt optisch erhalten.

Es würde zunächst keinen großen Unterschied machen, wenn der Schüler die falschen Stäbchen benutzte, z.B. $7 + 3$ und $5 + 5$. Hauptsache, die Gesamtlänge wäre gleich. (Die Proportionen wären leicht falsch, weil $7/3$ nicht $8/4$ sind, aber das würde kaum auffallen.) Wollte der Schüler aber weitere Rechnungen dazu finden und notieren, würden die in der Folge alle falsch. Der Erfolg steht und fällt also damit, dass die Schüler die Farbcodierung auswendig kennen.

Bewertung des Materials

Die Rechenstäbchen stellen sicher, dass Schüler nicht auf das zählende Rechnen ausweichen, denn das ist bei ihnen gar nicht möglich. Mangels Unterteilung kann man nur durch Nachmessen überprüfen, ob man das 4 cm oder 5 cm lange Stäbchen vor sich hat. Dieser Vorteil bringt aber zwei Nachteile mit sich.

Erstens haben schwache Schüler *keine Chance, sich durch Nachzählen zu vergewissern*, dass sie die richtige „Zahl“, das richtige Stäbchen, in der Hand halten. So ungünstig das zählende Rechnen als Strategie ist: Es gibt auch ein angemessenes Zählen,

und zur Absicherung ist es sehr hilfreich. Auch routiniert in Mengen denkende Erwachsene zählen im Zweifelsfall nach.

Zweitens erfordert es eine *sehr zeitintensive Einarbeitung* der Schüler, um die Stäbchen nach der „Méthode Cuisenaire“ wirklich sinnvoll zu nutzen. Zwar berichtet ein früherer Schweizer Dorflehrer, wie er mit dieser Methode eine beeindruckend sichere Orientierung im Zahlenraum bis 20 erreicht hat (vgl. Brühlmeier 2008). Doch selbst bei entsprechend begeistertem Engagement dauert es Wochen, bis die Schüler überhaupt die Längen der Stäbe verinnerlicht haben und diese sogar mit geschlossenen Augen tastend angeben können. Hier wird viel Zeit auf eine Fähigkeit verwendet, deren Nutzen doch sehr begrenzt erscheint.

Die lange Phase des Auswendiglernens erübrigt sich bei den Legosteinen, und die „Markierung“ durch die Noppen hilft Schülern, die Menge tatsächlich zu erkennen und nicht nur Kombinationen aus Tasteindruck oder Farbe und Zahlwort auswendig zu lernen, wie es bei den Rechenstäben geschieht. Außerdem sind die Steckverbindungen von Legosteinen sehr viel haltbarer als nebeneinander gelegte Rechenstäbe. Wie bei vielen Materialien ist nämlich auch bei den Stäbchen das Verrutschen ein Problem.

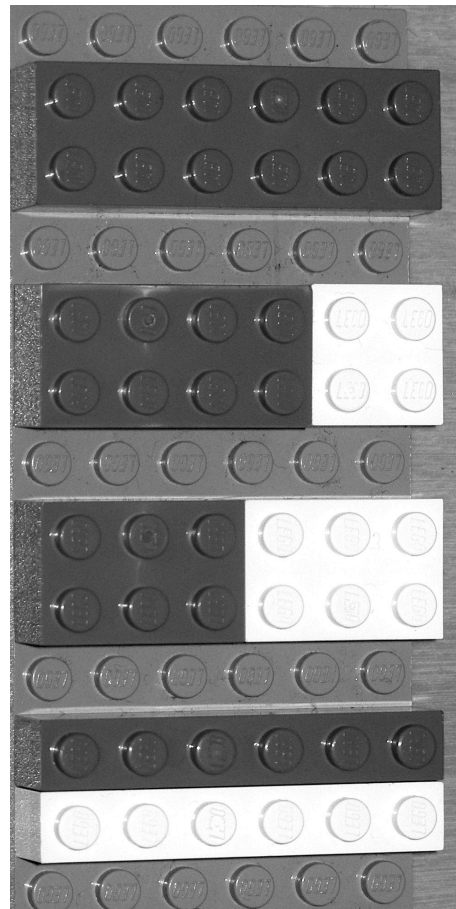
6.5 Lösung mit Legosteinen

Legosteine werden wie Cuisenaire-Stäbchen nicht einerbasiert, sondern mengenbezogen verwendet. Anders als bei den Rechenstäbchen ist aber der absolute Wert jedes Steins auf Anhieb zu erkennen, denn er entspricht der Anzahl der Noppen.

Lösungsweg

Die Steine mit den entsprechenden Werten steckt man auf eine Platte oder legt sie auf den Tisch. Die Rechnungen werden ein-

fach aus Steinen der entsprechenden Werte zusammengesetzt:
ein 8er und ein 4er-Stein, zwei 6er-Steine.



Die Gleichheit der beiden Mengen ist offensichtlich, da die Steine die gleiche Fläche einnehmen. Wer sehr unsicher ist, kann beide Rechnungen zur Kontrolle auf einen 12er-Stein stecken. Gleich große Mengen sind deckungsgleich. In der hier gezeigten Lösung ergeben sich zwei Varianten für $6 + 6$, da unterschiedlich geformte Steine verwendet werden können.

Bewertung des Materials

Wie die Bezeichnungen „4er“, „6er“, „8er“ erkennen lassen, machen Legosteine es Kindern recht *leicht, in Mengen zu denken*. Die Verführung zum Zählen ist deutlich geringer als bei einerbasiertem Material.

Die *Sprechweise* unterstützt das, wie bei den Rechenstäbchen: „Jetzt habe ich einen Vierer neben einen Achter gesteckt, das sind zwölf.“ Anders als bei Cuisenaire hilft jedoch die strukturierte Oberfläche bei der Erfassung. Wenn man unsicher ist, kann man zur Not auf das Nachzählen ausweichen und muss weder abmessen noch die Größen auswendig lernen.

Des weiteren können die gesteckten Legosteine *nicht verrutschen*. Das ist ein großer Vorteil gegenüber anderem Material. Man hat stets die Hände frei und muss sich auch keine Sorge machen, dass eine unbedachte Bewegung die aufgebaute Rechnung zerstört.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die *Kontrolle*. Ob zwei Mengen gleich groß sind, erkennt ein Kind sofort, weil dann die eine Menge lückenlos auf die andere gesteckt werden kann. Es muss nicht erneut zählen, um das Verhältnis zu erkennen, sondern ein Blick genügt. Die Ebenen decken sich oder es bleiben in der unteren Schicht Noppen sichtbar oder ein Stein steht über. Auch beim vergleichenden Bauen in einer Ebene, mit einer Steckplatte als Untergrund, ist die Kontrolle einfach.

Ferner lässt sich das Material *beliebig farbig strukturieren*. Es sind nicht nur zwei Farben vorhanden, sondern ungefähr ein Dutzend. So kann jeder Summand in einer anderen Farbe dargestellt werden. Das verbessert die Übersicht erheblich. Wer möchte, kann die Summanden immer noch weiter unterteilen, wie das bei der Rechenkette und dem Rechenbrett automatisch der Fall ist – man muss es aber nicht. Vor allen Dingen ermöglichen die Farben es, den *Rechenweg dauerhaft sichtbar* zu machen. Bei Rechenkette und Rechenbrett ist er ja nur in der Bewegung aus-

gedrückt, das Gesamtergebnis sieht in jeder Reihe gleich aus, weil die Farben der Perlen festliegen. Bei der Darstellung mit Lego® bleibt durch die unterschiedliche Farbgebung der Teilmengen der Rechenweg sichtbar. Das entlastet schwache Schüler und auch die starken haben etwas davon: Sie werden zu immer neuen Zusammensetzungen angeregt. Sie können z.B. die Summanden jeweils in der gleichen Farbe halten, sie aber zugleich aus weiteren kleinen Teilmengen zusammensetzen (z.B. drei rote 2er-Steine, um den 6er darzustellen). Differenzierung ist also in großer Vielfalt möglich, ohne dass die schwächeren Schüler durch das Material benachteiligt werden.

Wie man also sieht, vereinigen Legosteine in sich alle Vorteile der beliebtesten Rechenmaterialien, ohne jedoch deren Nachteile zu übernehmen. Hinzu kommen noch der hohe Aufforderungscharakter, die vergleichsweise geringen Anschaffungskosten, die hohe Strapazierfähigkeit und die ansprechende Gestaltung dieses Materials.

Wie bereits erwähnt fehlt im Lego-Sortiment ein Fünfer, Siebener und ein Zehnerstein. Dieser Umstand trägt aber positiv dazu bei, dass die Grundaufgaben bis 10 sehr rasch gelernt und automatisiert werden, wenn man ernsthaft mit dem Material arbeitet. Denn die fehlenden Steine für die Mengen fünf, sieben und zehn werden immer zusammengesetzt. Wo nötig, verwendet man zur Verdeutlichung die Platte mit eingezeichneten 10er-Feldern. Der Nachteil ist jedenfalls gering. Der geringe zusätzliche Aufwand fällt kaum ins Gewicht, wenn man bedenkt, wie viel Zeit man mit dem einerbasierten Material verschwendet, das mit dem Auslegen auch noch das zählende Rechnen forciert. Dennoch wären die entsprechenden Steine eine willkommene Ergänzung.

6.6 Zusammenfassende Beurteilung

| | Steine | Kette | Rahmen | Stäbe | Lego |
|--|--------|-------|--------|-------|------|
| Anregung, eigene Strategien zu entwickeln | 0 | 0 | + | + | + |
| Mehrere Lösungswege möglich | 0 | + | + | + | + |
| Unterschiedliche Rechenwege bleiben sichtbar | 0 | - | - | + | + |
| Vergewisserung ist ohne Zählen möglich | - | 0 | 0 | - | + |
| Einfache graphische Darstellung | 0 | 0 | 0 | 0 | + |
| Darstellung und Handeln eignen sich gut zur geistigen Repräsentation | - | 0 | 0 | + | + |
| Vielfältige Nutzbarkeit in verschiedenen Lernformen und Inhaltsbereichen | - | 0 | 0 | + | + |
| Gute Handhabbarkeit | 0 | 0 | + | 0 | + |

Lorenz und Radatz haben sieben *wissenschaftlich fundierte Beurteilungskriterien* für „Arbeitsmittel im arithmetischen Anfangsunterricht“ aufgestellt (Lorenz 2003, 91). Auf diesen validen und für den Praktiker sehr gut nachvollziehbaren Kriterien beruht die oben abgebildete Tabelle. Nicht enthalten ist allerdings die Frage, ob unterschiedliche Rechenwege nach Abschluss der Rechnung sichtbar bleiben. Dieses Kriterium habe ich hinzugefügt. Die Übersicht stellt dar, welches Material welche Kriterien erfüllt. + steht für volles Erfüllen, 0 für mittelmäßiges und - für Nichterfüllung.

Bei Steinen, Kette und Rahmen muss jeder Einer als Punkt gemalt werden: Das ist aufwändig und man verzählt sich leicht. Bei den Cuisenaire-Stäbchen ist die graphische Darstellung schwierig, weil sie sehr exakt gezeichnet sein muss; sonst sieht man nur Rechtecke mit einer unklaren Größe. Bei Legosteinen kann man Steine und Noppen abbilden, muss aber nicht: Gute Schüler können sich mit den Umrissen der Steine begnügen, was wegen der unterschiedlichen Form gut zu erkennen ist.